

## Rolle et accroissements finis

### Exe 1

peut-on appliquer le théorème de Rolle à  $f$  sur l'intervalle  $I$  :

$$1) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 3} \quad \text{و} \quad I = [-2, 2]$$

$$2) f(x) = x - E(x) \quad \text{و} \quad I = [1, 2]$$

$$3) f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{و} \quad I = [0, 1]$$

$$4) f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{و} \quad I = [-1, 1]$$

### Exe 2

En utilisant le théorème des accroissements finis montrer :

$$1) \left( \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \right) \quad \sin x < x < \tan x$$

$$2) \left( \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \right) \quad 1 - \cos x < x^2$$

### Exe 3

soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  ( $ab > 0$ )  
montrer que :

$$\left( \exists c \in \right] a, b[ \left) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(c)}{3c^2}$$

### Exe 4

en utilisant le théorème des accroissements finis calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \arctan x - \arctan \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-2}} \times \sqrt[15]{x^2}$$

### Exe 5

1) montrer que :

$$\left( \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \right) \quad x \cos x - \sin x < 0$$

2) étudier le sens de variation de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{sur} \quad \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

3) en déduire que :

$$\left( \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \right) \quad \frac{2x}{\pi} < \sin x < x$$

### Exe 6

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3-x^2}{2} & ; \quad x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

1) montrer que :

$$\left( \exists \alpha \in \mathbb{R} \right) \quad f(2) - f(0) = 2f'(\alpha)$$

2) quelles sont les valeurs de  $\alpha$

### Exe 7

1) montrer que :

$$\left( \forall x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right) \quad \sin x \geq x \cos x$$

2) on pose  $g(x) = x \sin x + 2 \cos x - 2$

a) étudier les variations de  $g$  sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$

b) déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$

3) soit la fonction  $f$  définie sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad ; \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

a) montrer que :

$$\left( \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \right) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) déduire que  $f$  est décroissante sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$

4) soit  $x$  de  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

a) montrer que

$$\left( \exists \alpha \in \right] 0, x[ \left) \quad \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1 - \cos \alpha}{3\alpha^2}$$

b) en déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$